

=====

四元数の行列表現・私家版

CopyRight MIYAMA. 2025 Nov

kazutomimiyama.sakura.ne.jp  
KazutomiMiyamaSub@gmail.com

Thanks :

DeepSeek氏  
MicroSoft、Copilot氏

=====

<はじめに>

AI氏と雑談をしていて、数学の話題になり、  
過去自分が練習問題として証明した記事を披露したところ、

「それは体裁をととのえて発表し直したほうがいい」

とすすめられたので、書き直して上梓することになりました。

これは、15年程度前に書いた  
「三次元随想」(ホームページ・ベクターさんに収録)という文章アーカイブに収録されている概念の項目ですが、そのアーカイブは、三次元の八面体行列(要素48。なんとか48手とか、アイドル48人とか参照。仏教縁起数。)の解説が大半になってしまい、  
こちらの概念は駆け足でさわりだけ触れることになってしまっていました。  
(なお証明試行はおよそ30年前です。)

今回は、

その部分をこちらに切り出し、解説をつけることになります。

もちろん先人の厳密な理論ではそれなりにいかめしい名前(どうもリー群らしい)が付いているのですか、素朴な過程をもとに推論しているので、その過程においての暫定便宜的な名前、をここでは優先して使用します。

私がつけた名称なので、まあ定着を目論むなどおそれおおいことはもちろん考えていませんが、概念と対になった命名なので、まあ読んでいて楽しいかもしれません。もちろん説明の概念が飲み込めればの話ですが。

-----

<四元数についてのかんたんな解説>

ハミルトンが発見した四元数は

・3つ組の虚数の一種であり、

- それは乗法において群をなすが、
- 積において交換法則が成立しない。  
ただし符号の向きを逆転すればそれは成立する
- 3つ組一緒の積には、回転概念的なパリティがあり回転を逆向きにすると値の符号が逆転する。  
(上の行と概念としては相同)

つまり、(ここで  $\wedge$  は階乗を示します)

$$\begin{aligned}
i^{\wedge 2} &= j^{\wedge 2} = k^{\wedge 2} = -1 \\
i*j &= -j*i = -k \\
j*k &= -k*j = -i \\
k*i &= -i*k = -j \\
\\
i*j*k &= -1 \\
k*j*i &= +1
\end{aligned}$$

が成り立ちます。

-----

<端緒になった行列>

偶然、

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

という行列が二乗すると、単位元の負値

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E$$

になることを発見しました。(その経緯は文書末にあります)

これを虚数単位  $i$  と合同であるとみなし、

行列演算の組み合わせで、野心的に四元数に相当する行列を定義できないか、

という試行錯誤の記録がこの文書です。

結論を先に書くと  $2 \times 2$  の正方行列ではそれは実現せず、いわば定義の拡張表現として  $4 \times 4$  の行列が、必要で、またそれで目的を達する結果を得ることができました。

-----

<試行錯誤の経緯>

当然、なにも手がかりは無いので、 $2 \times 2$  の行列で四元数が定義できないかと考えたわけです。

結果これのみの試行は失敗しましたが、その失敗の等式を概念拡張することで、最終的な  $4 \times 4$  行列を得ることができました。

まず、

(0はゼロ)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$E d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と定義します

Dはdifferent程度の意味です

(E dは単位元のdefferent)

また結果を先に書きますが、  
もう一つの行列を

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とし(Sはsameの意)この3つで積算群

になるかどうか試しました。

これだけではうまくいかないのですが、

(i E d)(D)(i S) なら四元数の条件  
を満たすことがわかりました。

以下、証明 (i は虚数単位)・・・(\*1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

---

$$E d * D = -S \quad \text{よって}$$

---

$$(i E d) * D = -(i S) > \text{四元数相当}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

---

$$D * S = -E d \quad \text{よって}$$

---

$$D * (i S) = -(i E d) > \text{四元数相当}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

---

$$S * E d = +D \quad \text{よって}$$

---

$$(i S) * (i E d) = -D$$

>これも四元数相当

---

<虚数単位 i を使わない行列表現>

四元数相当の積算群を得ることができましたが、これは無理やり既存の虚数単位を借り物として添加して結果を得たわけで、これでは行列表現で四元数を表現したことにはなりません。

ここで、

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$i \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = D$$

の性質を利用します。

2 \* 2 行列を 4 \* 4 行列に「拡大する」手法を、

$$A_{22} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A_{44} = \begin{pmatrix} a * E & b * E \\ c * E & d * E \end{pmatrix}$$

と考えます  
(E は 2 \* 2 正方行列の積算の単位元)

もちろん

$$A_{22} \equiv A_{44} \text{ です}$$

ここで、

$$i * A_{22} \equiv D * A_{44}$$

であり、D と E はおなじ 2 \* 2 の正方行列  
なので、D を 4 \* 4 行列による係数扱いとして考えることができます  
(Copilot 氏はこれをテンソルへの拡張と表現しました。詳しいことは知りません。)

よって

$$i * E_{d22} \equiv D * E_{d44} \quad (*2)$$
$$i * S_{22} \equiv D * S_{44} \quad (*3)$$

を考えます。

よって行列を拡張し 4 \* 4 行列、

※ O : オーは 2 \* 2 のゼロ行列  
※ E は 2 \* 2 の積算単位元

$$E_{d44} = \begin{pmatrix} E & O \\ O & -E \end{pmatrix}$$

$$D_{44} = \begin{pmatrix} O & -E \\ E & O \end{pmatrix} \quad (*4)$$

$$S_{44} = \begin{pmatrix} O & E \\ E & O \end{pmatrix}$$

を考えます、これに行列における虚数単位 D を係数扱いで作用させ、\* 1 の式相当の組み合わせ

$$\begin{pmatrix} D & O \\ O & -D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & -E \\ E & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & D \\ D & O \end{pmatrix}$$

を得ます。演算検証の結果、積算において四元数と同じ挙動を取ることが確認できました (\* 1 の証明と相同なので省略、素の証明はファイル末ににあり)

\* 4 は先に書いてしまいましたが、  
\* 2 と \* 3 の積から導くことができます。

-----  
<もう一つの組み合わせ>

- ・興味深いことに、四元数相当の行列はもう一組見つかりました。

前項では虚数挙動行列をDとして  
i の代わりに拡張置換したのですが、

こんどは虚数挙動を 4 \* 4 骨格で考えます

つまり前項では

$$i \ E \ d \equiv D * E \ d_{44}$$

$$i \ S \ \equiv D * S_{44}$$

という拡張でしたが

これを

$$i \ E \ d \equiv E \ d * D_{44}$$

$$i \ S \ \equiv S * D_{44}$$

と考えます

こうなると

2 \* 2 におけるDの立ち位置、  
D44を使うわけには行かなくなります  
(積算をすると破綻します)

ここで、  
(E、  
E44はそれぞれ積算に関する単位元)

$$D_{44} = E * D_{44}$$

(前項の組み合わせの要素) ですから

これを同じく係数・骨格の立場を逆転し

$$D \equiv D * E_{44}$$

と考えます。

これを i E d、i S の新拡張 4 \* 4

と組み合わせると、これも四元数としての  
積算群に合致しました。

-----  
< E d \* D44   D \* E44   S \* D44 の  
積算証明 >

$$E \ d * D = -S \quad \text{ゆえに}$$

$$\begin{pmatrix} O & -E \ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & -S \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} E \ d & O \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} O & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -S & O \end{pmatrix} = (-) \begin{pmatrix} S & O \end{pmatrix}$$

$$E \ d \ D_{44} \ * \ D \ E_{44} \ = \ -S \ D_{44}$$

$$D * S = -E \ d \quad \text{ゆえに}$$

$$\begin{pmatrix} D & O \\ O & -S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & -E d \\ O & -E d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & -E d \\ O & -D \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} S & O \\ O & O \end{pmatrix} = (-E d \ O) = (-) (E d \ O)$$

$$D E 44 \ * \ S D 44 \ = \ -E d D 44$$

$$S * E d = +D \ \text{ゆえに}$$

$$\begin{pmatrix} O & -S \\ S & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & -E d \\ E d & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D & O \\ O & -D \end{pmatrix} = (-) \begin{pmatrix} D & O \\ O & D \end{pmatrix}$$

$$S D 44 \ * \ E d D 44 \ = \ -D E 44$$

重要な概念の図示は以上です。

-----  
<厳密な検証>

それをテンソル操作というのは寡聞にして知らないこともあり、それだけで証明ことになるのかところもとないので、  
 検算として4＊4の素の表現でした検証を書いております。

煩雑になるので、カッコ、ゼロ、ゼロ行列は省略してあります  
 中央の縦横線はガイド線です。これで2＊2行列要素が区分されています

-----  
<添加虚数性質を、D22で処理した行列群：仮称「金」>

・自乗検証

$$\begin{array}{c|c} 1 & -1 \\ \hline & 1 \end{array} * \begin{array}{c|c} 1 & -1 \\ \hline & 1 \end{array} = \begin{array}{c|c} -1 & \\ \hline -1 & -1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} D & O \\ O & -D \end{pmatrix}^2 = -E 44$$

$$\begin{array}{c|c} & -1 \\ \hline 1 & 1 \end{array} * \begin{array}{c|c} & -1 \\ \hline 1 & 1 \end{array} = \begin{array}{c|c} -1 & \\ \hline -1 & -1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} O & -E \\ E & O \end{pmatrix}^2 = -E 44$$

$$\begin{array}{c|c} & -1 \\ \hline & 1 \end{array} * \begin{array}{c|c} & -1 \\ \hline & 1 \end{array} = \begin{array}{c|c} -1 & \\ \hline -1 & -1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} O & D \\ D & O \end{pmatrix}^2 = -E 44$$

$$\begin{pmatrix} O & -S \\ S & O \end{pmatrix}^2 = -E \quad (44)$$

・積算群挙動の確認

$$\begin{array}{c|c} -1 & \\ \hline & 1 \end{array} * \begin{array}{c|c} & -1 \\ \hline 1 & \end{array} = \begin{array}{c|c} & 1 \\ \hline 1 & \end{array} = (-) \begin{array}{c|c} & -1 \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} O & -E d \\ E d & O \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} D & O \\ O & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & S \\ -S & O \end{pmatrix} = (-) \begin{pmatrix} O & -S \\ S & O \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} & -1 \\ \hline 1 & \end{array} * \begin{array}{c|c} & -1 \\ \hline 1 & \end{array} = \begin{array}{c|c} & 1 \\ \hline -1 & \end{array} = (-) \begin{array}{c|c} & -1 \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} D & O \\ O & D \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} O & -S \\ S & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & E d \\ -E d & O \end{pmatrix} = (-) \begin{pmatrix} O & -E d \\ E d & O \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} & -1 \\ \hline -1 & \end{array} * \begin{array}{c|c} & -1 \\ \hline 1 & \end{array} = \begin{array}{c|c} & 1 \\ \hline -1 & \end{array} = (-) \begin{array}{c|c} & -1 \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} O & -S \\ S & O \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} O & -E d \\ E d & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D & O \\ O & -D \end{pmatrix} = (-) \begin{pmatrix} D & O \\ O & D \end{pmatrix}$$

-----

<複合表記だけではなになので>

悪ふざけとして、4 \* 4 行列にニックネームをつけてみました  
これは30年前の発案なので、当時のセンスの悪さに苦笑しつつ。

二通りの組が得られましたので好対照な名前が望ましく、  
また一般の数学記号が欧米寄りになっているのにもやや疑問をおもっていたので

「漢字を用いることにしました」

中国や朝鮮におおい姓に  
金、李があります。どちらもおめでたい意味があります。

片方は鉱物、片方は枝葉茂る樹木です。

虚数挙動行列を

- ・ 2 \* 2 のコンパクトなものを用いるか
- ・ 4 \* 4 の空間いっぱい使うものにするのか
- でこの組は得られましたが、これを
- ・ コンパクトを鉱物
- ・ 枝葉茂る空間を樹木と

こじつけて、昔の自分はこれを採用したもののらしいです。

ここで定義をあらためてまとめると、



$$\begin{array}{lcl}
& & (D \quad O) \\
\text{金Ed} & = & D * E \text{ d44} = (O \quad -D) \\
& & (O \quad -E) \\
\text{金(D)} & = & E * D \text{44} = (E \quad O) \\
& & (O \quad S) \\
\text{金S} & = & D * S \text{44} = (S \quad O)
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
& & (O \quad -E \text{ d}) \\
\text{李Ed} & = & E \text{ d} * D \text{44} = (E \text{ d} \quad O) \\
& & (D \quad O) \\
\text{李(D)} & = & D * E \text{44} = (O \quad D) \\
& & (O \quad -S) \\
\text{李S} & = & S * D \text{44} = (S \quad 0)
\end{array}$$

※ここで厳密に

「係数扱い行列がDであるものを金」

「骨格行列がDの性質であるものを李」

とするのなら、金(D)と李(D)は表記が逆になることになります。ただ、これらの積算群が閉じていて干渉しないのなら、違う漢字の名前が群のなかに混じってはわかりにくいので、便宜名でもあることもあり、このままにしました。

$$\begin{array}{l}
\text{あるいは} \\
\\
\text{金}(D * E \text{44}) \\
\text{李}(E * D \text{44})
\end{array}$$

と書くべきかもしれませんが、区別をつけるだけが命名理由なら、これもまた煩雑な形式です。

### <発展・可換群>

30年前の試行の記憶によると、

これらの2群6つの行列を積算において、「異群交配」をすると、9つの新行列が得られ、これらはそれぞれ非干渉な3つの積算可換群を構成します。それについて記述すると煩雑になるので省略します。

ただ、生成積としてのそれらには以下のような関係があります。それは以下に記述します。

横の金と縦の李が交点の組み合わせで得られたのがそれぞれの可換群行列になります。ここでは単純に「可」と書きます

金金金  
李可可可  
李可可可  
李可可可

これを意匠的にデザインし直すと、

E 金金金 E  
李可可可李  
李可可可李  
李可可可李  
E 金金金 E

胎蔵界のマンドラそっくりです。  
仏教の縁起数、仏教美術はインド数学のセ  
ンスが反映されています。  
イスラムの幾何学意匠にも群論が見られる  
と聞いています（新数学勉強法・講談社ブル  
ーボックス）

-----  
<付録： i ≡ D 発見の経緯>

これをみつけなければ、四元数挙動への拡  
張はできませんでした。発見はたまたまです。

半径 1 の円上の任意の点を考えます。  
基準線からのその点を示す角度をthetaと  
します。

x y 平面での回転変換の行列は以下であり  
(これは初等幾何で証明できます)

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

これは、行列の加法に従い、以下のように  
変形できます。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin(\theta) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E + \sin(\theta) D$$

これが大事でした。  
これが、 x y 平面ではなく、複素平面上の  
おなじ半径 1 の単位円上の点を示す、ド・モ  
アールの式と相同であるらしいことに気づ  
き、

$$\cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

において、 i ^2 = -1 ですから、  
D も二乗すると、行列における-1相当の  
概念は積算単位元の負値、-E であることに  
なります。

簡単な計算をしてみると、

$$D^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E$$

狐に鼻をつままれました。発見とは鼻がい  
たくなるものですね、という感じでした。  
(30年前)

=====

ファイルの終わり

=====